平成 19 年度理工Ⅰの水理学の解答［No. 20］

(1)

(a)任意の水路幅を B とすると，$Q=Bhv$ （・・・(ⅰ)）となる．

比エネルギーの極小値（最小値）は限界流に相当し，また，その時の流速（限界流速 v_c）は限界水深 h_c に相当して $v_c=(gh_c)^{1/2}$ である※1．ここで，v_c を式(ⅰ)の $Q=Bhv$ により消去すると，$h_c=[(Q^2)/(gB^2)]^{1/3}$ （・・・(ⅱ)）である．g，Q は定数なので，大きな幅 B（B_1 または B_3）の場合に水深 h は小さくなり，逆に小さな幅 B（B_2）の場合に水深 h は大きくなる．

従って，曲線 a が断面 1,3 に対応し，曲線 b が断面 2 に対応する．

※1：この点まで詳述する必要があると判断するならば，①式において E を h で微分して，それが 0 となる（より厳密には 2 階微分まで考慮）ときの v と h の関係を求めればよい．

(b) 開水路の中心線上に流下方向を正として x 軸を取ると，連続式より，

$$\frac{dQ}{dx}=0$$

$$\frac{d(Bhv)}{dx}=0 \qquad (Q=Bhv\text{ より})$$

$$hv\frac{dB}{dx}+Bv\frac{dh}{dx}+Bh\frac{dv}{dx}=0$$

$$Bh\frac{dv}{dx}=-v\left(h\frac{dB}{dx}+B\frac{dh}{dx}\right)$$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{Bh}\left(h\frac{dB}{dx}+B\frac{dh}{dx}\right) \qquad \cdots\ (\text{iii})$$

全水頭が保存されるので，水面上の流線でベルヌーイの式を考えると，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}+z+h\right)=0$$

$$\frac{1}{2g}2v\frac{dv}{dx}+\frac{dz}{dx}+\frac{dh}{dx}=0$$

$$\frac{v}{g}\left\{-\frac{v}{Bh}\left(h\frac{dB}{dx}+B\frac{dh}{dx}\right)\right\}+\frac{dz}{dx}+\frac{dh}{dx}=0 \qquad \{(\text{iii})\text{より}\}$$

$$-\frac{v^2}{gBh}\left(h\frac{dB}{dx}+B\frac{dh}{dx}\right)+\frac{dz}{dx}+\frac{dh}{dx}=0$$

$$-\frac{F_r{}^2}{B}\left(h\frac{dB}{dx}+B\frac{dh}{dx}\right)+\frac{dz}{dx}+\frac{dh}{dx}=0 \qquad \{F_r=v/(gh)^{0.5}\text{ より}\}$$

$$-\frac{h}{B}F_r{}^2\frac{dB}{dx}-F_r{}^2\frac{dh}{dx}+\frac{dz}{dx}+\frac{dh}{dx}=0$$

$$(1-F_r{}^2)\frac{dh}{dx}=-\frac{dz}{dx}+\frac{h}{B}F_r{}^2\frac{dB}{dx}$$

$$\frac{dh}{dx}=-\frac{1}{1-F_r^{\,2}}\frac{dz}{dx}+\frac{F_r^{\,2}}{1-F_r^{\,2}}\frac{h}{B}\frac{dB}{dx} \qquad \cdot\cdot\cdot(\mathrm{iv})$$

水路床が水平の条件より $dz/dx=0$ となるため，式(iv)は，

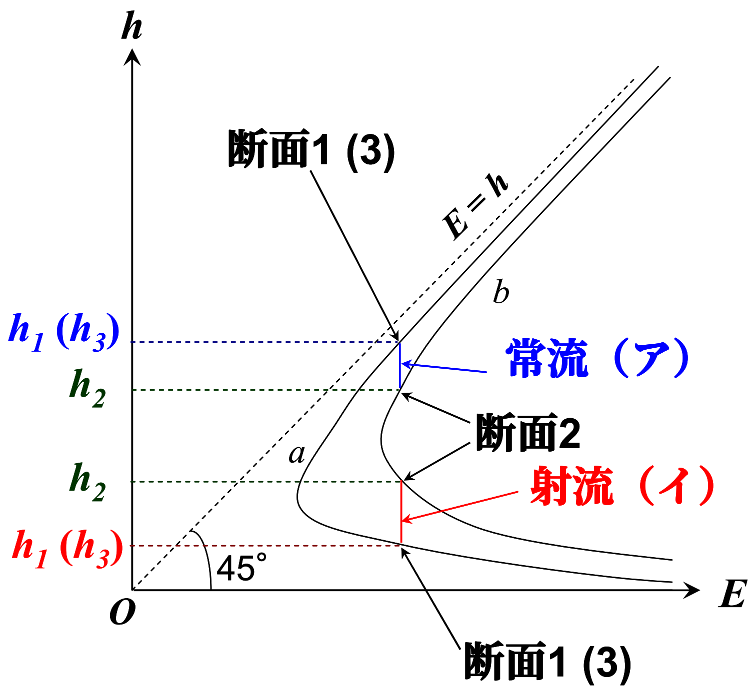
$$\frac{dh}{dx}=\frac{F_r^{\,2}}{1-F_r^{\,2}}\frac{h}{B}\frac{dB}{dx} \qquad \cdot\cdot\cdot(\mathrm{v})$$

（ア）常に常流の時：$F_r<1$ なので，式(v)より，$dB/dx<0$ の上流側で $dh/dx<0$（浅くなる），また $dB/dx>0$ の下流側で $dh/dx>0$（深くなる）．

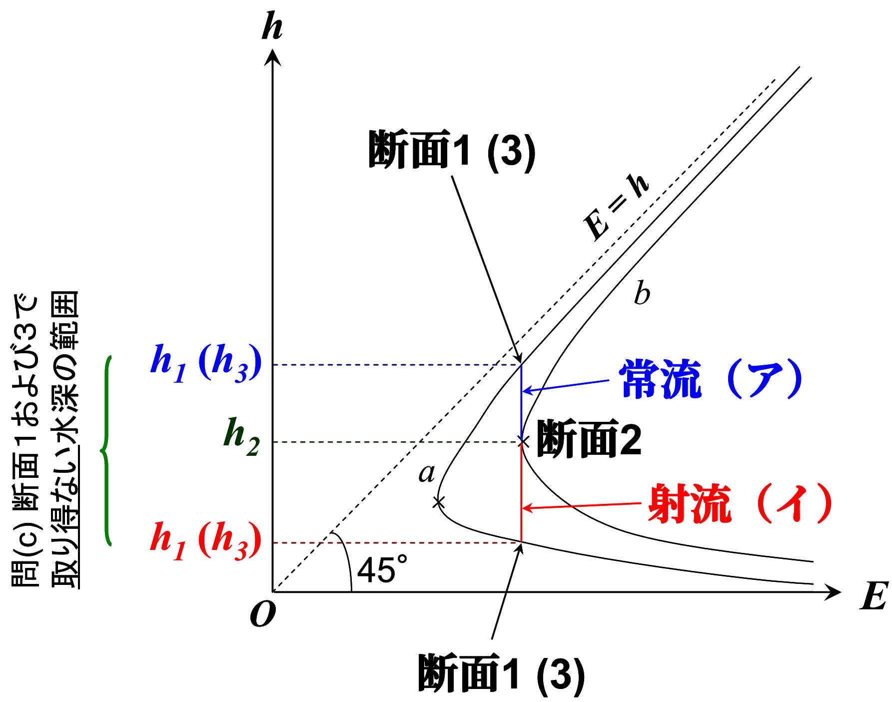
（イ）常に射流の時：$F_r>1$ なので，式(v)より，$dB/dx<0$ の上流側で $dh/dx>0$（深くなる），また $dB/dx>0$ の下流側で $dh/dx<0$（浅くなる）．すなわち，図Ｉ下の縦断図の状況である．

（ウ）上流側が常流（$F_r<1$）で下流側が射流（$F_r>1$）の時：$dB/dx=0$ となる位置で支配断面となり，限界流速となる．

なお，(b)の問題の最後に記載された「ただし，図Ⅱを答案用紙に写し，それを適宜加筆して説明すること」については，この場合，比エネルギーE が一定なので，以下のような図となる．



(c) 前問の解答の上図の極限状態（断面２が限界水深となる）が下図のようになる．これより，狭さく部に対応する b の曲線の極小値（×印）によって，h_1 および h_3 には取り得ない範囲（左端のコメント参照）が存在することが理解される．



(d) 式(ⅰ)より，$Q=Bhv=B_2h_2v_2$ であり，また限界流なので $v_c=v_2=(gh_2)^{1/2}$ となる。v_2 を消去すると，$Q=B_2h_2\,(gh_2)^{1/2}$ となり，h_2 について解くと，

$$h_2=\left(\frac{Q^2}{gB_2{}^2}\right)^{1/3}$$

式①より，比エネルギーは，

$$E=\frac{v_2{}^2}{2g}+h_2=\frac{gh_2}{2g}+h_2=\frac{h_2}{2}+h_2=\frac{3}{2}h_2$$

上の 2 つの式より，

$$E=\frac{3}{2}\left(\frac{Q^2}{gB_2{}^2}\right)^{1/3}$$

(e)断面 1 と 2 のそれぞれの断面における Froude 数を Fr_1, Fr_2 とすると $Fr_1=v_1/(gh_1)^{1/2}$, $Fr_2=v_2/(gh_2)^{1/2}$ となる．ここで断面 1 から 3 で常に常流なので，設問(b)の（ア)の状態で（$B_1>B_2$, $h_1>h_2$），$Fr_1<1$, $Fr_2<1$ である．$Q=B_1h_1v_1=B_2h_2v_2$ を考慮すると，$v_1<v_2$ であることから，$Fr_1<Fr_2$ である．従って，$Fr_2=v_2/(gh_2)^{1/2}<1$ となれば良い．

つまり，$v_2<(gh_2)^{1/2}$

両辺に B_2h_2 をかけると，$B_2h_2v_2<B_2h_2\,(gh_2)^{1/2}$ であり，左辺が流量 Q に等しいので以下の不等式が成り立てばよい．

$Q<B_2h_2\,(gh_2)^{1/2}$

$Q<B_2g^{1/2}h_2{}^{3/2}$ ・・・(vi)

今後は，式(vi)中で使えない h_2 を消去することになる．

断面1から3でエネルギー損失が無視できることから，断面1と断面 2 の間で以下のベルヌーイの式が成り立つ．

$$\frac{{v_1}^2}{2g}+h_1=\frac{{v_2}^2}{2g}+h_2$$

断面1での速度水頭が無視できることから，

$$h_1=\frac{{v_2}^2}{2g}+h_2$$

連続式（$B_1h_1v_1=B_2h_2v_2$）より，

$$h_1=\frac{1}{2g}\left(\frac{B_1h_1}{B_2h_2}v_1\right)^2+h_2$$

$$h_1=\frac{1}{2g}\left(\frac{B_1h_1}{B_2h_2}\right)^2{v_1}^2+h_2 \quad ・・・(vii)$$

マニングの式②より，

$$v_1=\frac{1}{n}{h_1}^{2/3}{i_0}^{1/2}$$

上式を，(vii)に代入すると，

$$h_1=\frac{1}{2g}\left(\frac{B_1h_1}{B_2h_2}\right)^2\left(\frac{1}{n}{h_1}^{2/3}{i_0}^{1/2}\right)^2+h_2$$

$$h_1=\frac{1}{2g}\left(\frac{B_1h_1}{B_2h_2}\right)^2\left(\frac{1}{n^2}{h_1}^{4/3}i_0\right)+h_2$$

$$h_1=\frac{1}{2gn^2}\frac{{B_1}^2}{{B_2}^2}\frac{{h_1}^2}{{h_2}^2}{h_1}^{4/3}i_0+h_2$$

$$h_1=\frac{i_0}{2gn^2}\frac{{B_1}^2}{{B_2}^2}\frac{{h_1}^{10/3}}{{h_2}^2}+h_2$$

$${h_2}^3-h_1{h_2}^2+\frac{i_0}{2gn^2}\frac{{B_1}^2}{{B_2}^2}{h_1}^{10/3}=0$$

上式より，h_2 と h_1 の関係，つまり h_2=func.(h_1)を求め，式(vi)に代入すれば良い．
因みに，実際に解くのは容易ではない．

(2)

(a) 式(iv)より，

$$\frac{dh}{dx}=-\frac{1}{1-F_r^{\,2}}\frac{dz}{dx}+\frac{F_r^{\,2}}{1-F_r^{\,2}}\frac{h}{B}\frac{dB}{dx}$$

これより，Froude 数と dz/dx，および水路幅の変化率 dB/dx により水深が変化することが分かる．水路幅の変化率 dB/dx は既知であることから，常流と射流および Δz の大きさにより，変化の傾向が異なる．

(b) 以下の式(iv)において，

$$\frac{dh}{dx}=-\frac{1}{1-F_r^{\,2}}\frac{dz}{dx}+\frac{F_r^{\,2}}{1-F_r^{\,2}}\frac{h}{B}\frac{dB}{dx}$$

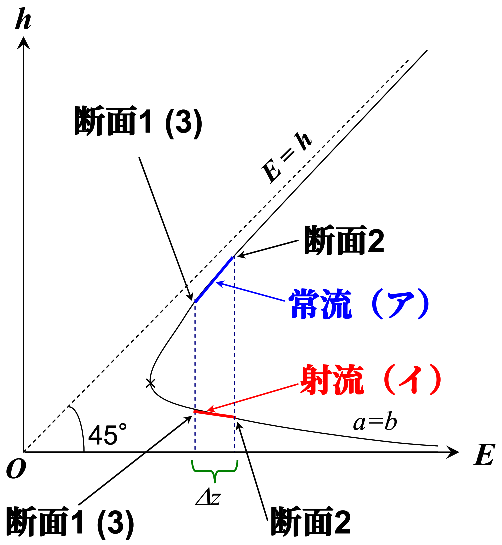
常に常流（F_r<1）であっても，射流（F_r>1）であっても，水面の変化 dh/dx の符号は決まらない．しかしながら，Δz がある程度大きくなると，{前問(1)と異なり} 式(iv)の右辺第一項が卓越するようになる．ここでは，Δz がある程度（十分に）大きいものとする．このとき，

$$\frac{dh}{dx} \quad -\frac{1}{1-F_r^{\,2}}\frac{dz}{dx}$$

（ア）常に常流の時：F_r<1 なので，上式より，dz/dx<0 の上流側で dh/dx>0（深くなる），また dz/dx>0 の下流側で dh/dx<0（浅くなる）．したがって，$h_1(=h_3)<h_2$ である．この場合が，図Ⅲ下の縦断図の状況である．

（イ）常に射流の時：F_r>1 なので，上式より，dz/dx<0 の上流側で dh/dx<0（浅くなる），また dz/dx>0 の下流側で dh/dx>0（深くなる）．したがって，$h_1(=h_3)>h_2$ である．

このときの，(1)の(b)に相当する図は下図のようになる．



逆に，Δz がある程度（十分に）小さくなると，右辺第二項が卓越するようになるので，（1）の(b), (c)で解答したような状況となる．

なお，当然ながらΔz が大きくも小さくもない時には，前述の 2 つの状況の中間的な結果となる．

(c) 題意を満たすためには，(1)の(b)の図と上図から分かるように，Δz が 2 つの曲線 a，b の極小値 {(1)の(d)参照} の差よりも大きくなる必要がある．

断面 1 から 2 の範囲を考えると，

$$\Delta z > \frac{3}{2}h_2 - \frac{3}{2}h_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{Q^2}{gB_2{}^2}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{Q^2}{gB_1{}^2}\right)$$

$$\Delta z > \frac{3Q^2}{2g}\frac{B_1{}^2 - B_2{}^2}{B_1{}^2 B_2{}^2}$$

また，前問(b)の結果から分かるように，式(iv)の第一項が卓越すると，断面 1 と 3 の水深が制約を受ける．したがって，第二項の絶対値が第一項の絶対値より十分大きくなる必要がある．したがって，

$$\left|-\frac{1}{1-F_r{}^2}\frac{dz}{dx}\right| << \left|\frac{F_r{}^2}{1-F_r{}^2}\frac{h}{B}\frac{dB}{dx}\right|$$

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| << \left|F_r{}^2\frac{h}{B}\frac{dB}{dx}\right|$$

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| << \left|\frac{v^2}{gh}\frac{h}{B}\frac{dB}{dx}\right| = \left|\frac{1}{gB}\left(\frac{Q}{Bh}\right)^2\frac{dB}{dx}\right| = \left|\frac{1}{gB}\frac{Q^2}{B^2h^2}\frac{dB}{dx}\right| = \left|\frac{Q^2}{gB^3h^2}\frac{dB}{dx}\right|$$

断面 1 から 2 の範囲を考えると，

$$\Delta z << \frac{Q^2}{gB^3h^2}\left(B_1 - B_2\right)$$

従って，

$$\frac{3Q^2}{2g}\frac{B_1{}^2 - B_2{}^2}{B_1{}^2 B_2{}^2} < \Delta z << \frac{Q^2}{gB^3h^2}\left(B_1 - B_2\right)$$

(3)

(a) 式⑤より，

$$u_* = \frac{\sqrt{g}nv}{h^{1/6}} \quad ・・・⑤'$$

⑤'を式④の $q_B=Ku_*^m$ に代入すると，

$$q_B = K\left(\frac{\sqrt{g}nv}{h^{1/6}}\right)^m = K\frac{n^m g^{m/2}}{h^{m/6}} v^m$$

連続式（$Q=Bhv$）を用いて，上式より v を消去すると，

$$q_B = K\frac{n^m g^{m/2}}{h^{m/6}}\left(\frac{Q}{Bh}\right)^m = K\frac{n^m g^{m/2}}{h^{m/6}}\frac{Q^m}{B^m h^m} = K n^m g^{m/2}\frac{Q^m}{B^m h^{7m/6}} \quad ・・・(\text{viii})$$

(b) 題意に従って，式①の左辺第一項を無視すると，

$$\frac{\partial}{\partial x}(B\, q_B) = 0$$

$$q_B\frac{\partial B}{\partial x} + B\frac{\partial q_B}{\partial x} = 0 \quad ・・・(\text{ix})$$

次に式(viii)を x で偏微分すると，

$$\frac{\partial q_B}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K n^m g^{m/2}\frac{Q^m}{B^m h^{7m/6}}\right) = K n^m g^{m/2} Q^m \frac{\partial}{\partial x}\left(Bh^{7/6}\right)^{-m}$$

$$= -mK n^m g^{m/2} Q^m \left(Bh^{7/6}\right)^{-1-m}\left(h^{6/7}\frac{\partial B}{\partial x} + B\frac{7}{6}h^{1/6}\frac{\partial h}{\partial x}\right) \quad ・・・(\text{x})$$

式(viii)と式(x)を式(ix)に代入すると，

$$\left(K n^m g^{m/2}\frac{Q^m}{B^m h^{7m/6}}\right)\frac{\partial B}{\partial x} + B\left[-mK n^m g^{m/2} Q^m \left(Bh^{7/6}\right)^{-1-m}\left(h^{6/7}\frac{\partial B}{\partial x} + B\frac{7}{6}h^{1/6}\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right] = 0$$

$$\left(\frac{1}{B^m h^{7m/6}}\right)\frac{\partial B}{\partial x} - mB\left(Bh^{7/6}\right)^{-1-m}\left(h^{6/7}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{7}{6}B\,h^{1/6}\frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0$$

$$B^{-m}h^{-7m/6}\frac{\partial B}{\partial x} - mB\,B^{-1-m}\,h^{-7(1+m)/6}\,h^{6/7}\frac{\partial B}{\partial x} - mB\,B^{-1-m}\,h^{-7(1+m)/6}\frac{7}{6}B\,h^{1/6}\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$B^{-m}h^{-7m/6}\frac{\partial B}{\partial x} - m\,B^{-m}\,h^{-7m/6}\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{7}{6}m\,B^{1-m}\,h^{-1-7m/6}\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} - m\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{7}{6}mB\,h^{-1}\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$(1-m)\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{7}{6}m\frac{B}{h}\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{6}{7}\frac{(1-m)}{m}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial x}$$

$$\int\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x}dx=\int\frac{6}{7}\frac{(1-m)}{m}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial x}dx+C_1$$ （C_1は積分定数）

$$\ln h=\frac{6}{7}\frac{(1-m)}{m}\ln B+C_1$$ （ただし，$h>0$，$B>0$）

$$h=C_2\cdot B\exp\left[\frac{6(1-m)}{7m}\right]$$ $\{C_2\ (=\exp\ c_1)>0\}$　・・・(＊)

上式において，m>1 を考慮すると，h は B に対して単調減少なので，B が最小の時に h は最大となる（勿論，微分して関数形を確かめる方がより厳密）．したがって，断面２において，水深 h は最大値をとる．

(c) 式(＊)の係数 C_2 を求めるために，境界条件：$B=B_1$ で $h=h_1$ を利用すると，

$$h_1=C_2\ B_1\exp\left[\frac{6(1-m)}{7m}\right]$$

$$C_2=h_1\cdot B_1\exp\left[-\frac{6(1-m)}{7m}\right]$$

よって，式(＊)は，

$$h=\left[h_1\cdot B_1\exp\left\{-\frac{6(1-m)}{7m}\right\}\right]\cdot B\exp\left\{\frac{6(1-m)}{7m}\right\}$$

$$h=h_1\cdot B_1^{\frac{6(m-1)}{7m}}\cdot B^{\frac{6(1-m)}{7m}}$$

したがって，求める断面 2，すなわち $B=B_2$ での水深 h_2 は，

$$h_2=h_1\cdot B_1^{\frac{6(m-1)}{7m}}\cdot B_2^{\frac{6(1-m)}{7m}}$$