H20 年　理工 I　 専門試験解答

【水理 NO.20】

(1)幅 B，勾配 i_0 の開水路において，底面せん断応力τが定数 f と流速 u を用いて，

$$\tau = \rho f u^2 \quad \cdots\cdots ①$$

で表すことが出来るものとする．

(a)いま，流量 Q の水が流れており，等流状態で水深 h_0 になっている．このとき微少長さΔx の区間の水塊に働く力の流下方向の釣り合いを考える．

まず，微少長さΔx の区間の水塊に働く全底面せん断応力は

$$(B\Delta x)\tau$$

次に同水塊に働く x 軸方向の重力成分は

$$(B\Delta x)\rho g \sin\theta\, h_0 \cos\theta$$

$$\approx (B\Delta x)\rho g \tan\theta\, h_0 = (B\Delta x)\rho g i_0\, h_0$$

従って，流下方向の力の釣り合いは

$$\underline{(B\Delta x)\tau = (B\Delta x)\rho g i_0 h_0} \quad \cdots\cdots ②$$

となる．

(b)②式を①式に代入すると

$$\tau = \rho f u^2 = \rho g i_0 h_0$$

従って，等流水深 h_0 は

$$h_0 = \frac{f}{g i_0} u^2 = \frac{f}{g i_0}\left(\frac{q}{h_0}\right)^2$$

$$\underline{\therefore h_0 = \left(\frac{f q^2}{g i_0}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad \cdots\cdots ③$$

(2)

(a)領域 1，2 における流下方向の力の釣り合いはそれぞれ

$$\frac{B}{2}\tau_1 = \rho g i_0 \frac{B}{2} h_0' ,\ \frac{B}{2}\tau_2 = \rho g i_0 \frac{B}{2} h_0' \quad \cdots\cdots ⑥$$

(b)流量は領域 1 と 2 の流量を合わせたものが全流量なので,

$$Q = \frac{B}{2} h_0' (u_1 + u_2) \quad \cdots\cdots ⑦$$

(c)領域 1 および 2 における底面せん断応力はそれぞれ

$$\tau_1 = \rho f_1 u_1^{\,2},\quad \tau_2 = \rho f_2 u_2^{\,2}$$

と表すことができるものとすると，領域 1 および 2 における流速 u_1，u_2 は

$$u_1 = \left(\frac{gi_0 h_0'}{f_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u_2 = \left(\frac{gi_0 h_0'}{f_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

これらを単位幅流量 q の式に代入すると

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2} h_0' \left(u_1 + u_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} h_0' \left(\left(\frac{gi_0 h_0'}{f_1} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{gi_0 h_0'}{f_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} h_0'^{\frac{3}{2}} \left(gi_0 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{f_1}} + \frac{1}{\sqrt{f_2}} \right) \end{aligned}$$

となる．従って等流水深 h'_0 は,

$$\begin{aligned} h_0'^{\frac{3}{2}} &= \frac{2q}{\sqrt{gi_0}} \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{f_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{f_2}}} \\ &= \frac{2q}{\sqrt{gi_0}} \frac{\sqrt{f_1 f_2}}{\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}} \end{aligned}$$

$$\underline{\therefore h_0' = \left(\frac{2q}{\sqrt{gi_0}} \frac{\sqrt{f_1 f_2}}{\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}} \right)^{\frac{2}{3}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

(d)式⑧より

$$\begin{aligned} h_0' &= \left(\frac{2q}{\sqrt{gi_0}} \frac{\sqrt{f_1 f_2}}{\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}} \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{gi_0}} \frac{u_1 + u_2}{2} h_0' \frac{\sqrt{f_1 f_2}}{\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}} \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= h_0'^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{\sqrt{gi_0}} \frac{u_1 + u_2}{2} \frac{\sqrt{f_1 f_2}}{\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}} \right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

従って,

$$h_0'^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{\sqrt{gi_0}} \frac{u_1 + u_2}{2} \frac{\sqrt{f_1 f_2}}{\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore h_0' = \left(\frac{2}{\sqrt{gi_0}} \frac{u_1 + u_2}{2} \frac{\sqrt{f_1 f_2}}{\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}} \right)^2$$

よって,

$$\begin{aligned}
\bar{\tau} &= \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = \rho g i_0 h_0' \\
&= \rho g i_0 \left(\frac{2}{\sqrt{gi_0}} \frac{u_1 + u_2}{2} \frac{\sqrt{f_1 f_2}}{\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}} \right)^2 \\
&= \rho g i_0 \frac{4}{g i_0} \left(\frac{u_1 + u_2}{2} \right)^2 \frac{f_1 f_2}{\left(\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2} \right)^2} \quad \cdots\cdots\cdots ⑨ \\
&= \rho \frac{4 f_1 f_2}{\left(\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2} \right)^2} \left(\frac{u_1 + u_2}{2} \right)^2 \\
&= \rho \bar{f} \bar{u}^2
\end{aligned}$$

ここで,

$$\bar{f} = \frac{4 f_1 f_2}{\left(\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2} \right)^2}$$

(e)f_1 および f_2 が微少量εを用いて

$$f_1 = f \quad , f_2 = f(1+\varepsilon) \quad \cdots\cdots\cdots ⑩$$

と表されるものとする．εの 2 次以上の高次の項は無視できるとすれば，平均的定数 $\bar{f}$ は

$$\begin{aligned}
\bar{f} &= \frac{4 f_1 f_2}{\left(\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2} \right)^2} \\
&= \frac{4 f \cdot f (1+\varepsilon)}{f + 2 f (1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + f (1+\varepsilon)} \\
&= \frac{4 f^2 (1+\varepsilon)}{f (4 + 2\varepsilon)} \\
&= f \frac{1+\varepsilon}{1 + \frac{1}{2}\varepsilon} \\
&= f \frac{1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2}{1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

$$\approx f\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\right)$$

となる．また，

$$h_0' = \left(\frac{2q}{\sqrt{gi_0}}\frac{\sqrt{f_1 f_2}}{\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{4q^2}{gi_0}\frac{f_1 f_2}{\left(\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}\right)^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{q^2}{gi_0}\bar{f}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= h_0 \bar{f}^{\frac{1}{3}}$$

$$= h_0 f\left(1+\frac{1}{6}\varepsilon\right)$$

(3)

(a)運動方程式を水深方向ならびに横断方向に積分し，区間 $0 \le x \le L$ における断面平均した流速および底面せん断応力を $\bar{u}$ ，$\bar{\tau}$ と表すと以下のようになる．

$$\frac{d}{dx}\left(\bar{u}^2 h\right) = ghi_0 - gh\frac{dh}{dx} - \bar{f}\bar{u}^2 \quad \cdots\cdots\cdots ⑭$$

ここで，式⑭左辺第一項は加速度勾配，右辺第一項と第二項は圧力勾配，右辺第三項は摩擦力をそれぞれ表す．

(b)連続の式は

$$q = h\bar{u} = h_0 u_0$$

で表される．区間 $0 \le x \le L$ において微少量η，νを用いて

$$h = h_0 + \eta \quad ,\bar{u} = u_0 + \nu$$

と表すと，連続の式は

$$h\bar{u} = \left(h_0+\eta\right)\left(u_0+\nu\right) = h_0 u_0$$

$$h_0 u_0 + \nu h_0 + u_0\eta + \eta\nu = h_0 u_0$$

微少量η，νの二つ以上の積は極微少として無視できることから，結局，連続の式は

$$u_0\eta + \nu h_0 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ⑯$$

(c)同様に運動方程式は

$$\frac{d}{dx}\left(2u_0 h_0 \nu + u_0{}^2\eta\right) = g\eta i_0 - gh_0\frac{d\eta}{dx} - f\left(\frac{\varepsilon}{2}u_0{}^2 + 2u_0\nu\right) \quad \cdots\cdots\cdots ⑰$$

となる．式⑰に式⑯を代入してνを消去するとηに対する方程式が得られる．

$$\frac{d}{dx}\left(-u_0{}^2\eta\right)=g\eta i_0-gh_0\frac{d\eta}{dx}-f\left(\frac{\varepsilon}{2}u_0{}^2-2\frac{u_0{}^2}{h_0}\eta\right)$$

いま，h_0，u_0 は等流状態の流速および水深であるので微分の外に出すことが出来て，

$$-u_0{}^2\frac{d\eta}{dx}=g\eta i_0-gh_0\frac{d\eta}{dx}-fu_0{}^2\left(\frac{\varepsilon}{2}-2\frac{\eta}{h_0}\right)$$

両辺を gh_0 で除してまとめると

$$\underline{\frac{d\eta}{dx}=\frac{i_0-2Fr^2 f}{1-Fr^2}\frac{\eta}{h_0}-\frac{Fr^2}{1-Fr^2}\frac{\varepsilon}{2}f} \quad \cdots\cdots ⑱$$

式⑱を解くと，

$$\eta=Ae^{\frac{i_0-Fr^2 f}{(1-Fr^2)h_0}x}-\frac{Fr^2 fh_0}{i_0-2Fr^2 f}\frac{\varepsilon}{2}$$

ここで，A は積分定数である．境界条件 $x=L$ で $\eta=0$ より，

$$A=\frac{Fr^2 fh_0}{i_0-2Fr^2 f}\frac{\varepsilon}{2}e^{-\frac{i_0-Fr^2 f}{(1-Fr^2)h_0}L}$$

従って，

$$\underline{\eta=\frac{Fr^2 fh_0}{i_0-2Fr^2 f}\frac{\varepsilon}{2}\left(e^{\frac{i_0-Fr^2 f}{(1-Fr^2)h_0}(x-L)}-1\right)} \quad \cdots\cdots ⑲$$

(4)

(a)

(b)微少量 ν_2 に関する微分方程式

$$\frac{d\nu_2}{dx}=-\frac{f}{h_0}\nu_2 \quad \cdots\cdots 23$$

を解くと

$$\nu_2=Ce^{-\frac{f}{h_0}x}$$

境界条件 $x=0$ で $u_2=\ \bar{u}_0'$ より，

$$C=\frac{\varepsilon}{4}\bar{u}_0'$$

従って，

$$\underline{\nu_2=\frac{\varepsilon}{4}\bar{u}_0'e^{-\frac{f}{h_0}x}} \quad \cdots\cdots 24$$

(c) v_2 が $\overline{u}_0' - u_{20}$ の 1%になるまでの流下距離 L_{99} は式 24 および式 21 より

$$0.01\left(\overline{u}_0' - u_{20}\right) = \frac{\varepsilon}{4}\overline{u}_0' e^{-\frac{f}{h_0}L_{99}}$$

$$0.01\left(\overline{u}_0' - \overline{u}_0'\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)\right) = \frac{\varepsilon}{4}\overline{u}_0' e^{-\frac{f}{h_0}L_{99}}$$

$$\therefore 0.01 = e^{-\frac{f}{h_0}L_{99}}$$

ここで,

$$e^{-4.6} = 0.01$$

であるので,

$$\underline{L_{99} = 4.6\frac{h_0}{f}} \quad \cdots\cdots 25$$

となる.