平成21年度理工Iの水理学の解答

（1）この管路内の流れは文意から等流であるので，せん断応力は線形的に分布する．さらに，せん断応力は壁面を最大として管路中央で0となるので，y 軸方向の τ の分布は,

$$\tau = \tau_o \left(1 - \frac{2y}{D}\right)$$

となる．

（2）まず，層流の場合は与えられたせん断応力の式を（1）で得られた式に代入すると,

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \tau_o \left(1 - \frac{2y}{D}\right)$$

となり，積分すると,

$$\begin{aligned} \int \frac{\mu}{\tau_o} du &= \int \left(1 - \frac{2y}{D}\right) dy + A \\ \frac{\mu}{\tau_o} u &= \left(y - \frac{y^2}{D}\right) + A \end{aligned}$$

となる．動粘性係数 $\nu = \mu/\rho$ を定義して用いると,

$$\frac{\rho}{\tau_o} \nu u = \left(y - \frac{y^2}{D}\right) + A$$

となる．ここで，$y = 0$ で $u = 0$ より $A = 0$ となり，さらに摩擦速度 V_* を代入すると,

$$\frac{\nu u}{V_*^2} = \left(y - \frac{y^2}{D}\right)$$

となり，u を V_* で無次元化して表すと,

$$\frac{u}{V_*} = \frac{V_*}{\nu} \left(y - \frac{y^2}{D}\right)$$

が得られる．

次に，乱流の場合も同様に,

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 = \tau_o \left(1 - \frac{2y}{D}\right)$$

となり，計算すると,

$$\begin{aligned} \rho \kappa^2 y^2 \left(1 - \frac{2y}{D}\right) \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 &= \tau_o \left(1 - \frac{2y}{D}\right) \\ \int d\bar{u} &= \int \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \frac{dy}{\kappa y} + A \\ \bar{u} &= \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \ln y + A \end{aligned}$$

となる．ここで，$y = y_0$ の時，$\bar{u} = 0$ となるので，

$$A = -\frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}\ln y_0$$

となり，代入して整理すると，

$$\frac{\bar{u}}{V_*} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{y}{y_0}$$

が得られる．

（3）断面１と２の間の区間を対象にすると，

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

である．

（4）まず，層流の場合の断面平均流速 V を求めるために（２）の結果を利用して流量 Q を求めると，

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{D/2} 2\pi r u dy \\ &= \int_0^{D/2} 2\pi\left(\frac{D}{2} - y\right)\cdot\frac{V_*^2}{\nu}\left(y - \frac{y^2}{D}\right)dy \\ &= 2\pi\frac{\tau_0}{\rho\nu}\cdot\frac{D^3}{64} \end{aligned}$$

となる．よって，断面平均流速 V は

$$V = \frac{Q}{\pi\frac{D^2}{4}} = 2\pi\frac{\tau_0}{\rho\nu}\cdot\frac{D^3}{64}\frac{4}{\pi D^2} = \frac{\tau_o}{8\rho\nu}D$$

となる.（3）の問題文中の f の定義を用いて τ_o を消去すると，

$$\tau_o = \frac{8\rho\nu V}{D} = \frac{1}{8}\rho V^2 f$$

となり，f について解くと，

$$\begin{aligned} \frac{8\rho\nu V}{D} &= \frac{1}{8}\rho V^2 f \\ f &= 64\frac{\nu}{VD} = \frac{64}{R_e} \end{aligned}$$

となり，層流の場合の摩擦抵抗係数は R_e 数に支配される．

乱流の場合，壁面の相当粗度高 k_s を指標として，以下ような

$$R_e = \frac{V_* k_s}{\nu}$$

という，あらさの R_e 数を定義する．この数字が大きいほど粗面，小さいと滑面である．滑面では層流の場合と同様に f は R_e 数に支配されるが，粗面では k_s/D に支配される．

（5）ダルシーワイズバッハ式から動水勾配 I を求めると，

$$I = \frac{h_L}{L} = f\frac{1}{D}\frac{V^2}{2g}$$

となり，これをマニングの式に代入すると，

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{n}\left(\frac{D}{4}\right)^{2/3} I^{1/2} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{D}{4}\right)^{2/3}\left(f\frac{1}{D}\frac{V^2}{2g}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

となる．これを整理すると，

$$f = \frac{2g4^{4/3}n^2}{D^{1/3}}$$

となる．この f は V がないために R_e に依存しないことが分かる．よってマニングの式は粗面に適用される式である．