H23 年国公２次試験専門問題解説（水理）

【No.20】

(1)

㋐：非定常項であり，空間中のある地点におけるx方向流速uの時間変化率を表す.

㋑：慣性項であり，流体粒子が空間的な流速変化から受ける加速度を表す.

㋒：圧力勾配であり，圧力のx方向の変化率を表す.

㋓：粘性項であり，分子粘性によるせん断応力の空間勾配を表す.

(2)

与条件により，以下のことが成り立つ.

i)等流であることから，定常であり，流下方向には流速に変化がない.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

ii)質量力は，x,y 方向にそれぞれ，X=$g\sin\theta$, Y=$-g\cos\theta$である.

よって，NS 式は，

$$v\frac{\partial u}{\partial y}=gsin\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad ①'$$

$$v\frac{\partial v}{\partial y}=-gcos\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+2\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad ②'$$

また，連続式から，

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

が得られる.底面と水面が変動していない,すなわち底面と水面において v=0 であることから,連続式より全地点で v=0 であることが得られる．よって，①’，②’はそれぞれ，

$$0=gsin\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad ①''$$

$$0=-gcos\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad ②''$$

となる．②″を積分すると，

$$p=-\rho gycos\theta+p_a\,(x)$$

が得られるが，水面での圧力は大気圧（p_a=0）で一定をおいてよいので，$\frac{\partial p}{\partial x}=0$ とおける.

求める圧力分布は，

$$p = -\rho g y cos\theta$$

よって，①″は

$$0 = g sin\theta + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

となる．これを 2 回積分すると，

$$u = -\frac{g sin\theta}{\nu} y^2 + C_1 y + C_2$$

境界条件として，y=0：u=0, y=h_0: du/dy=0 を用いると，積分定数 C_1,C_2 は決定され，

$$u = -\frac{g sin\theta}{\nu}(y^2 - 2h_0 y)$$

が流速分布として得られる．

(3)

NS 式①，②に含まれる u, v, p についてレイノルズ分解を施した後に，与式へ代入して，さらに時間平均操作を加える．

$$u = \bar{u} + u', v = \bar{v} + v', p = \bar{p} + p'$$

また，左辺第 2，3 項については，連続式を用いて，次の形にしておく．

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial (uu)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y}$$

①式の各項について，以下の様に計算できる．

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$$

$$\overline{\frac{\partial u^2}{\partial x}} = \overline{\frac{\partial(\bar{u} + u')^2}{\partial x}} = \frac{\partial(\bar{u}^2 + \overline{u'u'})}{\partial x}, \overline{\frac{\partial uv}{\partial y}} = \overline{\frac{\partial(\bar{u} + u')(\bar{v} + v')}{\partial y}} = \frac{\partial(\bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'})}{\partial y}$$

$$\overline{\frac{\partial p}{\partial x}} = \overline{\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \overline{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \overline{\frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$$

また，定流であるので，$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$などが成り立つ．したがって，これらの代入して整理すると③，④式が得られる．

(4)

レイノルズ応力は①，②式中の左辺第 2 項，第 3 項の慣性項から発生するが，これらの項は非線形項になっているため，変動量の積が平均操作で残る．これが，レイノルズ応力の発生要因である．

(5)

次のように変数の無次元化を行う．

$$x_n = \frac{x}{L}, y_n = \frac{y}{L}, u_n = \frac{u}{V}, v_n = \frac{v}{V}, X_n = \frac{X}{g}, Y_n = \frac{Y}{g}, t_n = \frac{tV}{L}$$

これらを①式へ代入すると，

$$\frac{V^2}{L}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t_n}+u_n\frac{\partial u_n}{\partial x_n}+v_n\frac{\partial u_n}{\partial y_n}\right)=gX_n-\frac{V^2}{L}\frac{\partial p_n}{\partial x_n}+\nu\frac{V}{L^2}\left[2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_n^2}+\frac{\partial}{\partial y_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial y_n}+\frac{\partial v_n}{\partial x_n}\right)\right]$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t_n}+u_n\frac{\partial u_n}{\partial x_n}+v_n\frac{\partial u_n}{\partial y_n}=\frac{gL}{V^2}X_n-\frac{\partial p_n}{\partial x_n}+\frac{\nu}{LV}\left[2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_n^2}+\frac{\partial}{\partial y_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial y_n}+\frac{\partial v_n}{\partial x_n}\right)\right]$$

(6)

(5)で得られた無次元式中で右辺第1項と第3項に含まれる次の無次元パラメータをそれぞれ，レイノルズ数とフルード数と呼ぶ．

$$Re=\frac{LV}{\nu},Fr^2=\frac{V^2}{gL}$$

今，縮尺の異なる2つの同様な流体現象があるとき，これら2つの無次元パラメータが同じ値を持てば，無次元化された運動方程式は2つの現象に対して全く同じ方程式を示す．このことは，得られる無次元解が全く同じことを意味しており，すなわち2つの現象は相似であることになる．しかしながら，現実には異なる縮尺の現象に対して，両者を同時に一致させることは一般的には出来ない．そこで，流れについて自由水面のある場合（すなわち開水路流）では重力作用が重要であることからフルード数を一致させ，自由水面のない場合(管路流)は，レイノルズ数を一致させることで相似解を得ることを行う．これらを，フルードの相似則とレイノルズの相似則と呼んでいる．

(7)

題意より，フルードの相似則が成立するので，

$$\frac{V_m^2}{gL_m}=\frac{V_m^{5/2}}{gQ_m^{1/2}}=\frac{V_{mp}^2}{gL_p}=\frac{V_p^{5/2}}{gQ_p^{1/2}},\qquad \therefore\frac{Q_p^{1/2}}{Q_m^{1/2}}=\frac{V_p^{5/2}}{V_m^{5/2}}$$

また，模型の縮尺から，

$$\frac{Q_p^{1/2}}{Q_m^{1/2}}=S\frac{V_p^{1/2}}{V_m^{1/2}}$$

よって，これらより，

$$V_m=\frac{V_p}{\sqrt{S}},Q_m=\frac{Q_p}{S^{5/2}}$$