H24 年国公２次試験専門問題解説（水理）

【No.20】

(1)(a)

連続式は，

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \qquad \text{(i)}$$

エネルギー保存式は，

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_l \quad \text{(ii)}$$

次に，管路の中心軸の基準面からの傾き角をθとおくと，２断面間の距離は$(z_2-z_1)/\sin\theta$とおける．よって，運動量保存式は，

$$\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1 = -\frac{\rho g sin\theta A_2 (z_2 - z_1)}{sin\theta} + A_1 p_1 + A_e p_e - A_2 p_2$$

ここで，A_eは断面①における壁面部の面積($=A_2-A_1$), p_eはA_eに作用している圧力と考える．通常，$p_e = p_1$と考えてよいので上式は，

$$\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1 = -\rho g A_2 (z_2 - z_1) + A_2 p_1 - A_2 p_2 \quad \text{(iii)}$$

とおける．

(b)

(i)より，$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}$ ，(iii)より，$p_1 - p_2 = \rho v_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - \rho v_1^2 \frac{A_1}{A_2} + \rho g (z_2 - z_1)$が得られる．これを(ii)へ代入することで，

$$h_l = \frac{1}{2g}(v_1^2 - v_2^2) + z_1 - z_2 + \frac{1}{\rho g}(p_1 - p_2)$$

$$= \frac{v_1^2}{2g}\left\{1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right\} + \frac{v_1^2}{g}\left\{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - \frac{A_1}{A_2}\right\}$$

$$= \frac{v_1^2}{2g}\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

(c)

断面①，②におけるピエゾ水頭は，それぞれ，

$$\phi_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho g}, \qquad \phi_2 = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

より，変化量は，

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} - \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) = \frac{v_1^2}{g}\frac{A_1}{A_2}\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)$$

(2)(a)

$\frac{\partial M}{\partial h}=0$となるところを求めればよい．よって，比力の定義式より，

$$\frac{\partial M}{\partial h}=-\frac{q^2}{g}\frac{1}{h^2}+h=0$$

よって，$h_{cM}=\sqrt[3]{q^2/g}$ （すなわち，限界水深）となる．これを定義式へ代入すれば，

$$M_{min}=\frac{3}{2}h_{cM}^2=\frac{3}{2}\sqrt[3]{q^2/g}^{\,2}$$

(b)

比エネルギーの定義式は，$E=\frac{q^2}{2gh^2}+h$ より，$\frac{\partial E}{\partial h}=0$ となる水深を求めればよい．よって，

$$\frac{\partial E}{\partial h}=-\frac{q^2}{g}\frac{1}{h^3}+1=0 \ \ \therefore h_{cE}=\sqrt[3]{q^2/g}$$

となり，一致することが示される．

(c)

比エネルギーの定義式より，

$$\Delta E=E_1-E_2=\left[\frac{q^2}{2gh^2}+h\right]_1-\left[\frac{q^2}{2gh^2}+h\right]_2=(h_1-h_2)\left(1-\frac{q^2}{2g}\frac{h_1+h_2}{h_1^2h_2^2}\right)$$

比力は跳水前後で変化しないので，

$$\left[\frac{q^2}{gh}+\frac{h^2}{2}\right]_1=\left[\frac{q^2}{gh}+\frac{h^2}{2}\right]_2$$

が成り立つ．よって，

$$(h_1-h_2)\left(h_1+h_2-\frac{2q^2}{g}\frac{1}{h_1\,h_2}\right)=0 \quad \therefore \frac{2q^2}{g}=h_1\,h_2\,(h_1+h_2)$$

これをΔE へ代入すると，

$$\Delta E=(h_1-h_2)\left(1-\frac{1}{4}h_1\,h_2\,(h_1+h_2)\frac{h_1+h_2}{h_1^2h_2^2}\right)=\frac{(h_2-h_1)^3}{4h_1h_2}$$

※共役水深の式が与えられているが，この式が比力一定の条件から導出されるものであるので，同様に誘導可能である．

(d)

比エネルギー図中で，h_1=h_a, h_2=h_e に相当するので，(c)で得られた解より，

$$\Delta E=\frac{(h_e-h_a)^3}{4h_ah_e}$$

(3)(a)

$$P_1 = \int_0^{d_1} p(y)dy = \int_0^{d_1} \rho g y cos\theta dy = \frac{1}{2}\rho g d_1^2 cos\theta$$

(b)

各断面の流速は，連続式より，それぞれ $q/d_1, q/d_2$ と表される．さらに対象区間の水の重量の流下方向成分を W_x とすれば，$W_x = W sin\theta = \frac{\rho g}{2} KL(d_1 + d_2) sin\theta$ である．

運動量保存式は，

$$\rho q\left(\frac{q}{d_2} - \frac{q}{d_1}\right) = W_x + P_1 - P_2$$

より，

$$\rho q^2\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right) = \frac{\rho g}{2} KL(d_1 + d_2) sin\theta \ + \frac{1}{2}\rho g d_1^2 cos\theta - \frac{1}{2}\rho g d_2^2 cos\theta$$

$$q^2\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right) = \frac{g}{2}\left[KL(d_1 + d_2) sin\theta \ + (d_1^2 - d_2^2) cos\theta\right] \quad \text{(A)}$$

(c)

(A)式について整理すると，

$$\frac{2q^2}{g}\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right) = KL(d_1 + d_2) sin\theta \ + (d_1^2 - d_2^2) cos\theta$$

$$2Fr_1^2 d_1^3\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right) = (d_1^2 - d_2^2)\left[-\frac{KL sin\theta}{d_2 - d_1} \ + cos\theta\right]$$

$$2G^2 d_1^3\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right) = (d_1^2 - d_2^2)$$

両辺に $d_2/d_1{}^3$ をかけると，

$$2G^2\left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right) = \frac{d_2}{d_1} - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3$$

$$\therefore \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3 - \ (2G^2 + 1)\frac{d_2}{d_1} + 2G^2 = 0$$

(d)

G は定数より，３次方程式の解を得ればよい．この式は因数分解できて，

$$\left(\frac{d_2}{d_1} - 1\right)\left\{\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 + \frac{d_2}{d_1} - 2G^2\right\} = 0$$

よって，d_2=d_1 となる解と，

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1 + 8G^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8G^2} - 1\right)$$

が得られる．根号の前の符号は正しかとれないので，最後の解が得られる．