過去問の出題傾向（2019.5ver）

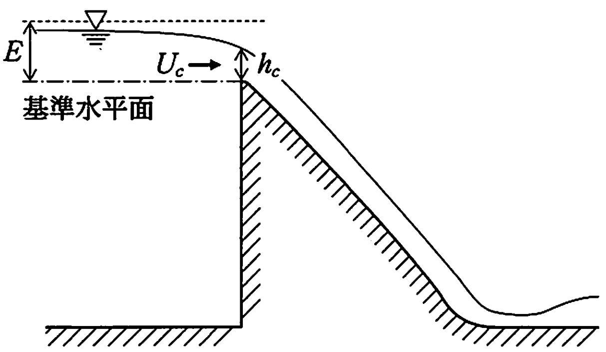
年度	項目
30	開水路流，堰の流れ，不等流，ポテンシャル流れ，乱流・層流
29	開水路流，定流，衝撃波（マッハ波），段波
28	開水路流，不定流，洪水波
27	相対的静止，開水路急変流(段上がり)，共役水深，段波
26	開水路流，水面形の式，限界水深・等流水深，管路流，エネルギー損失
25	開水路流，水面形，フルード数，マニング式，非定常流，段波（洪水波）
24	管路流，開水路流，ベルヌーイの式，エネルギー損失，運動量の定理，比エネルギー，比力，跳水，共役水深
23	開水路流，NS式，ﾊｰｹﾞﾝ・ﾎﾟｱｽﾞｲｭ（HP）流れ，RANS式，NS式の無次元化，Fr・Re相似則
22	開水路流，一次元漸変流，限界・等流水深，水面形
21	円管流，HP流，対数則，ダルシー・ワイズバッハ（DW)の式，摩擦損失係数f，滑面・粗面，マニング式
20	開水路流
19	開水路急変流，比エネルギー，限界水深
18	RANS式，Re応力，対数則，開水路流，径深，
17	円管流，HP流れ，エネルギー保存則の導出，DW式,f，ベルヌーイの定理
16	開水路流，常流・射流の遷移，限界水深，跳水，段波
15	開水路流，横越流，横流入
14	円管流，DW式，ベルヌーイの式，形状損失，
13	開水路流，跳水，比エネルギー，共役水深，比力

科目 20. 水理学[No. **20**]
本科目の選択者は，**科目 15(流体力学[機械系])を選択することはできません。**

【No. **20**】 ダム余水吐を越流する流れに関する以下の設問に答えよ。

ただし，単位幅当たりの流量を q，重力加速度の大きさを g とする。また，解答は，その導出過程も記述すること。

(1) 図Ｉのようなダム余水吐における越流について，以下の問いに答えよ。



図Ｉ

余水吐頂点における一次元不等流の基礎式は，

$$q = U_c h_c \qquad \cdots\cdots①$$

$$E = \frac{U_c^2}{2g} + h_c \qquad \cdots\cdots②$$

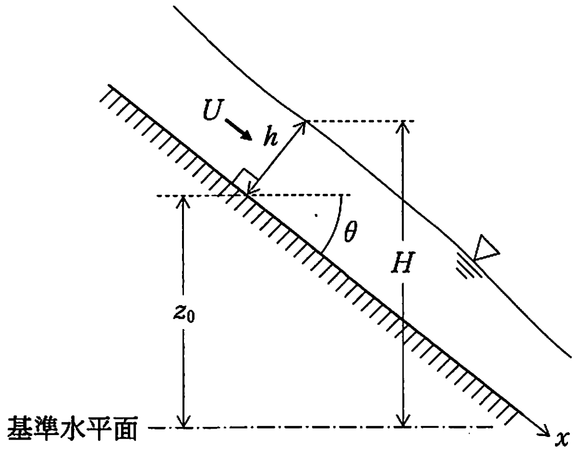
で与えられる。

ただし，余水吐頂点における断面平均流速と水深をそれぞれ U_c，h_c，余水吐頂点を基準水平面としたときの全水頭を E とする。

(a) 式①，②の物理的意味を，それぞれ 2 行程度で説明せよ。

(b) 余水吐頂点で限界水深が現れるとき，U_c，h_c，q を E，g を用いてそれぞれ表せ。

(2) 一様な広矩形断面を持つ図Ⅱのような開水路流れに関する以下の問いに答えよ。



図Ⅱ

一様な広矩形断面水路における，一次元不等流の基礎式は，

$$\frac{d}{dx}(Uh) = 0 \qquad \cdots\cdots③$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g} + H\right) = -\frac{\tau_0}{\rho g h} \qquad \cdots\cdots④$$

で与えられる。

ただし，水路床に沿った流れ方向を x 軸，断面平均流速を U, x 軸に直角に測った水深を h, 基準水平面から測った水路床の高さと当該水路床における水面の高さをそれぞれ z_0, H とすると，

$$H = z_0 + h\cos\theta \qquad \cdots\cdots⑤$$

$$\frac{dz_0}{dx} = -\sin\theta \qquad \cdots\cdots⑥$$

が成り立つ。ここで，水平面から測った水路床勾配を $\theta\,(0 \leqq \theta < \pi/2)$ とする。また，水路床に働く平均摩擦応力 τ_0 は，摩擦損失係数を f, 水の密度を ρ とすると，

$$\tau_0 = \frac{f}{8}\rho U^2 \qquad \cdots\cdots⑦$$

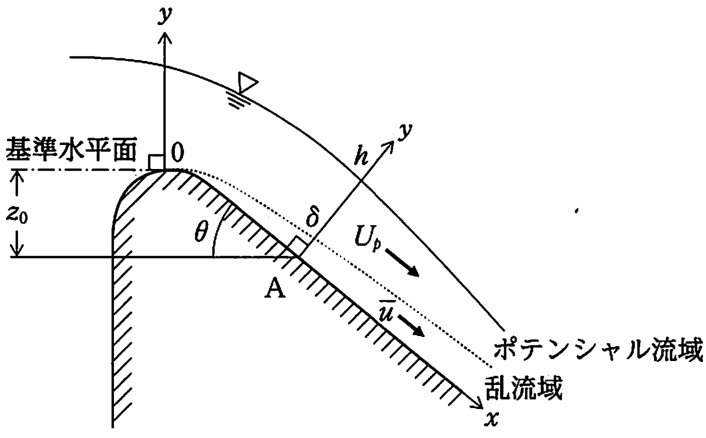
で与えられる。

(a) 水深勾配 dh/dx を θ, f, g, h, q を用いて表せ。

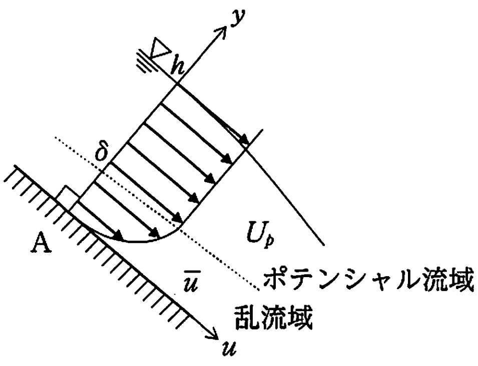
ただし，$d\theta/dx$ は無視できるものとする。

(b) (a)で求めた方程式を用いて，f を 0 としたときの射流の水面形を簡潔に説明せよ。

(3) 図Ⅲのようなダム余水吐越流部近傍の流れに関する以下の問いに答えよ。



図Ⅲ



図Ⅳ

図Ⅲにおいて，余水吐上流はポテンシャル流域であり，越流部 $x = 0$ を過ぎると水路床からの乱流が発達し，下流に向かって乱流域が拡大し水面に達する。

ただし，余水吐頂点の高さを基準水平面，水路床に沿った流れ方向を x 軸，y 軸は x 軸に垂直とし，基準水平面から測った水路床の高さを z_0，水路床を $y = 0$，乱流域とポテンシャル流域の境界を $y = \delta$，水面を $y = h$，水平面から測った水路床勾配を $\theta\,(0 \leqq \theta < \pi/2)$ とする。また，図Ⅳは，点Aにおける流速分布を示し，ポテンシャル流域における流速を U_p，乱流域における x 方向の時間平均流速を $\overline{u}$ とする。

(a) ポテンシャル流れの定義及びポテンシャル流れと渦なし流れの関係について，それぞれ2行程度で述べよ。

(b) 余水吐を通過する水の全水頭 E が与えられたとき，未知量 U_p，δ，h は以下の3本の関係式⑧，⑨，⑩から求めることができる。

$$E = \frac{U_p^2}{2g} + h\cos\theta + z_0 \quad \cdots\cdots ⑧$$

$$q = U_p(h - \delta^*) \quad \cdots\cdots ⑨$$

$$\frac{\tau_0}{\rho} = U_p^2\left\{\frac{d\Delta}{dx} + \frac{\Delta}{U_p}\frac{dU_p}{dx}\left(2 + \frac{\delta^*}{\Delta}\right)\right\} \quad \cdots\cdots ⑩$$

ただし，δ^*，Δ は，

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\overline{u}}{U_p}\right)dy \quad \cdots\cdots ⑪$$

$$\Delta = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\overline{u}}{U_p}\right)\frac{\overline{u}}{U_p}dy \quad \cdots\cdots ⑫$$

と定義される。

このとき，以下の問いに答えよ。

(i) ポテンシャル流域における圧力水頭を h, y, θ を用いて表せ。また，式⑧が成り立つことを示せ。

ただし，越流部から下流の流れは，静水圧分布で近似できるものとする。

(ii) q と U_p, $\overline{u}$ の関係より，式⑨が成り立つことを示せ。

(iii) 式⑪，⑫で定義される δ^*，Δ の物理的な意味を2行程度で述べよ。また，$\overline{u}$ が，

$$\overline{u} = U_p\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \qquad \cdots\cdots⑬$$

で与えられるとき，δ^*，Δ を式⑪，⑫を用いて δ で表せ。

(iv) 乱流域における流体の運動方程式が，式⑭，⑮で与えられている。

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = 0 \qquad \cdots\cdots⑭$$

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = g\sin\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) \qquad \cdots\cdots⑮$$

ここで，式⑮を y に関して，区間 $0 \leqq y \leqq \delta$ で積分することにより，式⑩を導くことができる。このとき，$y = 0$, δ における境界条件として，$\overline{u'v'}$ の値をそれぞれ示せ。また，式⑩の τ_0 は式⑮のどの項に基づくかを示し，その理由も述べよ。

ただし，y 方向の時間平均流速を $\overline{v}$，時間平均圧力を $\overline{p}$，x 方向，y 方向の時間平均流速からの流速のずれをそれぞれ u', v'，それらの積の時間平均値を $\overline{u'v'}$，動粘性係数を ν とする。

(v) 乱流が最初に水面に達する条件を δ, h を用いて示せ。また，乱流域が水面に達すると，水面から空気が混入し，白く泡立つ現象が見られる。この現象と乱流の関係を簡潔に述べよ。

H30 年国公２次試験専門問題解説（水理）

【No.20】

(1)

(a)式①：1 次元定常流の単位幅あたりの連続式であり，局所的な流速と水深の積がその位置における単位幅流量となることを意味している．

式②：1 次元定常流の比エネルギー式であり，水理底面を基準とした比エネルギーが速度水頭と圧力水頭で表されることを示している．

(b)限界水深が現れることより，フルード数が 1 となる．

$$\frac{U_c^2}{gh_c} = 1 \qquad \cdots (A)$$

式①，②，(A)を連立させることで，

$$h_c = \frac{2}{3}E, U_c = \sqrt{\frac{2}{3}gE}, q = \sqrt{\frac{8}{27}gE^3}$$

(2)

(a)式③，④をそれぞれ展開すると，

$$h\frac{dU}{dx} + U\frac{dh}{dx} = 0$$

$$\frac{U}{g}\frac{dU}{dx} + \frac{dz_0}{dx} + \frac{dh}{dx}cos\theta = -\frac{fU^2}{8gh}$$

両式と問題の仮定，ならびに $q=Uh$ より

$$\left(cos\theta - \frac{q^2}{gh^3}\right)\frac{dh}{dx} = sin\theta - \frac{fq^2}{8gh^3}$$

$$\therefore \ \frac{dh}{dx} = \frac{sin\theta - \frac{fq^2}{8gh^3}}{cos\theta - \frac{q^2}{gh^3}}$$

(b)f=0 より，

$$\frac{dh}{dx} = \frac{sin\theta}{cos\theta - \frac{q^2}{gh^3}}$$

射流のとき，フルード数は 1 以上となることから上式は負値をとることが分かる．よって，このとき水面形は斜面に沿って水深が減少するような形をとることが分かる．これは摩擦による損失がないため，重力により加速し続けるために流速が大きくなり，そのため水深が減少していくことを示している．

(3)

(a)ポテンシャル流れの定義：速度ポテンシャルΦが存在し，その空間勾配(grad Φ)が流速成分(u, v, w)となる流れをいう．

ポテンシャル流れと渦なし流れの関係：渦なし流れ，すなわち，渦度がない流れにおいて，速度ポテンシャルは存在できる．よって，渦なし流れとポテンシャル流れは等価である．

(b)

(i)斜面上の位置 x において，y=y 地点における圧力 $p(y)$は，$p(y)=\rho g(h-y)\cos\theta$である．ゆえに圧力水頭は，$p/\rho g=(h-y)\cos\theta$である．堤頂部における全水頭を E とすれば，ポテンシャル流域における y=y の位置で，ベルヌーイの定理より次式が成立．

$$E=\frac{U_p^2}{2g}+(h-y)cos\theta+ycos\theta-z_0=\frac{U_p^2}{2g}+hcos\theta-z_0$$

※問題の式⑧の z_0 の前の符号は間違っていると考えられる．

(ii)式⑪より，

$$\delta^*=\int_0^\delta\left(1-\frac{\bar{u}}{U_p}\right)dy=\frac{1}{U_p}\int_0^\delta\left(U_p-\bar{u}\right)dy$$

$$\therefore U_p\delta^*=\int_0^\delta\left(U_p-\bar{u}\right)dy$$

$$\therefore \int_0^\delta\bar{u}\,dy=\int_0^\delta U_p\,dy-U_p\delta^*$$

単位幅流量 q は，

$$q=\int_0^\delta\bar{u}dy+\int_\delta^h U_p dy=\int_0^\delta U_p\,dy-U_p\delta^*+\int_\delta^h U_p dy=U_p h-U_p\delta^*=U_p(h-\delta^*)$$

(iii)δ^*は排除厚と呼ばれ，上方の一様流速（ここでは U_p）から流速が減じた部分（ここでは厚みδ）について，一様流速を持っていた場合と等価な厚みを表している．

Δは運動量厚と呼ばれ，上方の一様流速域の運動量（ここではρU_p^2）から減速域の運動量（ここでは$\rho\bar{u}^2$）を除いた減少分について，一様流速域の運動量を持っていた場合と等価な厚みを表している．

$$\delta^*=\int_0^\delta\left(1-\frac{\bar{u}}{U_p}\right)dy=\int_0^\delta\left(1-\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right)dy=\frac{\delta}{8}$$

$$\Delta=\int_0^\delta\left(1-\frac{\bar{u}}{U_p}\right)\frac{\bar{u}}{U_p}dy=\int_0^\delta\left(1-\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right)\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}dy=\frac{7\delta}{72}$$

(iv)式⑭より，式⑮の左辺は

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}=\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\int_0^y\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}dy$$

これを y 方向に乱流域内で積分すると，

$$\int_0^{\delta}\left[\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\int_0^{y}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}dy\right]dy=\int_0^{\delta}\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}dy-\left[\bar{u}\int_0^{y}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}dy\right]_0^{\delta}+\int_0^{\delta}\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}dy=\int_0^{\delta}\left(2\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}-U_p\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)dy$$

式⑮の右辺は，

$$\int_0^{\delta}\left[g sin\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}-\overline{u'v'}\right)\right]dy=\int_0^{\delta}\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}\right]dy-\frac{\tau_0}{\rho}$$

$$=-\frac{1}{\rho}\int_0^{\delta}\frac{\partial p_p}{\partial x}dy-\frac{\tau_0}{\rho}=\int_0^{\delta}U_p\frac{\partial U_p}{\partial x}dy-\frac{\tau_0}{\rho}$$

なぜなら，境界層内にポテンシャル流れの圧力勾配$\frac{\partial p_p}{\partial x}$がそのまま伝わると考えられ，ポテンシャル流域での運動方程式$U_p\frac{\partial U_p}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_p}{\partial x}$から，上式が得られる．よって，

$$\frac{\tau_0}{\rho}=-\int_0^{\delta}\left(2\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}-U_p\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)dy+\int_0^{\delta}U_p\frac{\partial U_p}{\partial x}dy$$

$$=\int_0^{\delta}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\bar{u}\left(U_p-\bar{u}\right)\right]+\frac{\partial U_p}{\partial x}\left(U_p-\bar{u}\right)\right\}dy=\frac{\partial U_p^2\Delta}{\partial x}+U_p\frac{\partial U_p}{\partial x}\delta^*=U_p^2\left\{\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\frac{\Delta}{U_p}\frac{\partial U_p}{\partial x}\left(2+\frac{\delta^*}{\Delta}\right)\right\}$$

よって，式⑩のτ_0は，式⑮の右辺第 3，4 項から得られ，y=0 におけるせん断応力，すなわち底面せん断応力を意味している．$\overline{u'v'}$については，y=0 で 0，ならびに y=δでも 0 とする境界条件を用いる．つまり，底面上では乱流は発達できないためレイノルズ応力は 0 となり，乱流境界層上面では流速勾配が 0 となることからせん断応力は 0 となり，粘性応力ともに 0 となるためである．［※ただし，この問題では式⑩を導くことが求められていないと解釈可能であり，ここまでの導出を行わずに説明することは可能である.］

(v)乱流が最初に水面に達する条件は，δ=h となることである．［※この他の解答として，流速分布をべき乗則（例えば 1/7 乗則）で仮定し，式⑩より，δと x との関係式を得た後に，δ=h として x を示すことも考えられる. しかし, 題意では流速分布を仮定するようにはなっていない.］乱流域が水面に達すると，水面が激しく動揺し気中から空気を取り込むため細かい泡が立つ. これを white water と呼ぶ.