科目 20. 水理学〔No. 20〕
本科目の選択者は，**科目 15（流体力学〔機械系〕）を選択することはできません。**

【No. 20】 開水路流れに関する以下の設問に答えよ。
ただし，解答は，その導出過程も記述すること。

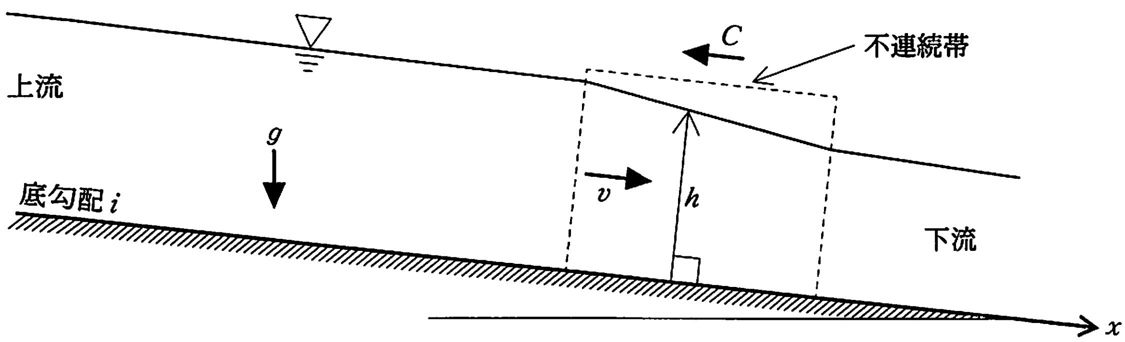
(1) 図Ⅰは，下流の急激な水位低下により不連続帯が形成され，その影響が波速 $C\,(C > 0)$ で上流側に伝播する様子を示す。この現象は1次元不定流の基礎方程式：

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (vA)}{\partial x} = 0 \qquad \cdots\cdots①$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x} + g\,(i - I_f) \qquad \cdots\cdots②$$

で表される。

ただし，時間を t，水路床に沿った方向距離を x，重力加速度の大きさを g，断面平均流速を v，水深を h，流水断面積を A，水路の底勾配を i，摩擦勾配を I_f とする。



図Ⅰ

(a) 次の文中の㋐，㋑を A，B，g を用いて表せ。

ただし，B は水面幅で $B = \dfrac{dA}{dh}$ とし，$[f]_{x=x^-}$ は，x の関数 f の $x = x^-$ における値を示す。

「流水断面積 A が水深 h の関数として与えられているとき，式①は，

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{A}{B}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \cdots\cdots③$$

と表すことができる。式②，③は水深 h と流速 v に関する偏微分方程式であり，この方程式系に初期条件と境界条件を課すことで h と v を求めることができる。方程式②，③を単一のスカラーの微分の形に変形すると，

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(v + \frac{A}{B}\frac{dK}{dh}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right](v + K) = g(i - I_f) \qquad \cdots\cdots④$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(v - \frac{A}{B}\frac{dK}{dh}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right](v - K) = g(i - I_f) \qquad \cdots\cdots⑤$$

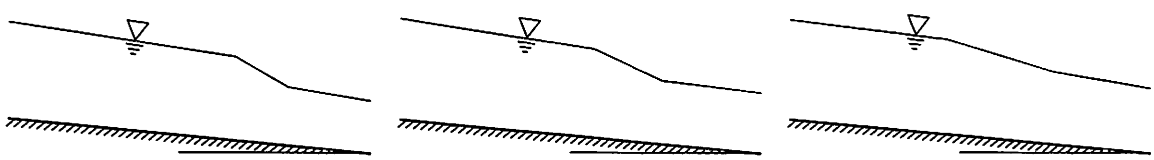
と表すことができる。ただし，K は h のみの関数で

$$\frac{dK}{dh} = \boxed{\quad ㋐ \quad} > 0 \qquad \cdots\cdots⑥$$

を満たす。式⑤の左辺は，$\dfrac{dx^-}{dt} = \Big[v - \boxed{\quad ㋑ \quad}\Big]_{x=x^-}$ を満たす x-t 平面上の特性曲線 $x = x^-$ 上の $(v - K)$ の時間変化率を表す。特に，式②において $(i - I_f)$ の値が無視できる場合は，$(v - K)$ は特性曲線 $x = x^-$ 上で一定値となり，不連続帯は，x 軸の正方向に速度 $\Big(v - \boxed{\quad ㋑ \quad}\Big)$ で移動する。」

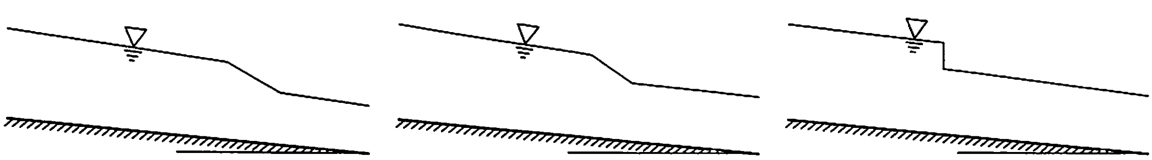
(b) 長方形断面の幅広水路の場合には，不連続帯の伝播速度 C は $\sqrt{gh} - v$ となる。このとき，図Ⅱ(ア)，(イ)のうち，下流の急激な水位低下による不連続帯内の水面形状の時間変化として，最も妥当なのはどれか。また，その理由について，100 字程度で説明せよ。

ただし，t_0，t_1，t_2 の順に時間が経過するものとする。



$t = t_0$　　　$t = t_1$　　　$t = t_2$

(ア)

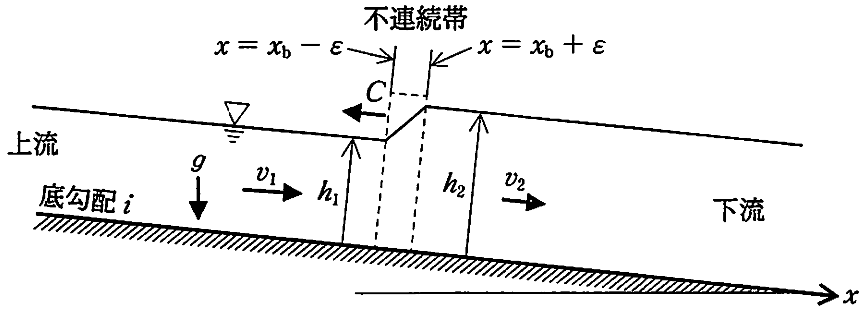


$t = t_0$　　　$t = t_1$　　　$t = t_2$

(イ)

図Ⅱ　水面形状の時間変化

(2) 図Ⅲは，下流の急激な水位上昇により不連続帯が形成され，その影響が波速 $C\,(C > 0)$ で上流側に伝播する様子を示す。ここで，不連続帯は，中心位置が $x = x_\mathrm{b}$，幅が 2ε であるとする。また，図中下付き添字の 1，2 は，それぞれ不連続帯の上流及び下流の値であることを示し，$h_1 < h_2$ とする。



図Ⅲ

(1)の 1 次元不定流の基礎方程式①，②により，図Ⅲに示す現象も表される。

(a) 次の文中の㋒，㋓を v，h を用いて表せ。

ただし，B は水面幅とする。

「長方形断面の幅広水路では，$A = Bh$ であり，式①，②から質量及び運動量保存の方程式を求めると，それぞれ

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial\left(\boxed{\text{㋒}}\right)}{\partial x} = 0 \qquad \cdots\cdots⑦$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\boxed{\text{㋓}}\right)}{\partial x} = ghi - ghI_f \qquad \cdots\cdots⑧$$

となる。」

(b) 上式を x に関して区間 $x_\mathrm{b} - \varepsilon \leqq x \leqq x_\mathrm{b} + \varepsilon$（$\varepsilon$ は正の定数）で積分すると，

$$\int_{x_\mathrm{b}-\varepsilon}^{x_\mathrm{b}+\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial t}dx + \int_{x_\mathrm{b}-\varepsilon}^{x_\mathrm{b}+\varepsilon} \frac{\partial\left(\boxed{\text{㋒}}\right)}{\partial x}dx = 0 \qquad \cdots\cdots⑨$$

$$\int_{x_\mathrm{b}-\varepsilon}^{x_\mathrm{b}+\varepsilon} \frac{\partial(vh)}{\partial t}dx + \int_{x_\mathrm{b}-\varepsilon}^{x_\mathrm{b}+\varepsilon} \frac{\partial\left(\boxed{\text{㋓}}\right)}{\partial x}dx = \int_{x_\mathrm{b}-\varepsilon}^{x_\mathrm{b}+\varepsilon}(ghi - ghI_f)dx \qquad \cdots\cdots⑩$$

となる。式⑨，⑩の左辺第 1 項の時間微分を以下のライプニッツの法則

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_\mathrm{b}-\varepsilon}^{x_\mathrm{b}+\varepsilon} f dx = \frac{dx_\mathrm{b}}{dt}[f]_{x=x_\mathrm{b}+\varepsilon} - \frac{dx_\mathrm{b}}{dt}[f]_{x=x_\mathrm{b}-\varepsilon} + \int_{x_\mathrm{b}-\varepsilon}^{x_\mathrm{b}+\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial t}dx \qquad \cdots\cdots⑪$$

を用いて積分の外に出し，さらに，式⑨，⑩の左辺第 2 項は定積分を行い，その後 $\varepsilon \to +0$ としたときの方程式をそれぞれ求めよ。

ただし，$[f]_{x=x_\mathrm{b}\pm\varepsilon}$ は，x，t の関数 f の $x = x_\mathrm{b} \pm \varepsilon$（複号同順）における値を示す。また，$v$，$h$，$I_f$，$i$ は有限であり，v，h の $x = x_\mathrm{b} - 0$ と $x = x_\mathrm{b} + 0$ における値をそれぞれ v_1，h_1 と v_2，h_2 とする。

(c) (b)で求めた方程式が，x 軸正方向に速度 $\dfrac{dx_{\mathrm{b}}}{dt}$ で移動する座標系における定常流の質量及び運動量の保存則と，等価であることを示せ。

(d) $\dfrac{dx_{\mathrm{b}}}{dt}$ 及び v_2 を v_1, h_1, h_2 を用いて表せ。

(e) (d)の複数の解のうちで，図Ⅲに示す現象を表す解を示せ。