H27 年国公２次試験専門問題解説（水理）

【No.20】

(1)相対的静止の問題．

(a)z 方向加速度は重力加速度のみであり，$a_z=-g$.

　x 方向加速度は，遠心力 $r\omega^2$ が働くことから，$a_x=r\omega^2=xV^2/x^2=V^2/x$.

(b)得られた加速度より，圧力の式は

$$dp=\rho\left(\frac{V^2}{x}dx-gdz\right)$$

となる．積分すると，

$$p=\rho V^2\int\frac{dx}{x}-\rho g\int dz=\rho V^2\ln x-\rho gz+C$$

積分定数 C は，$x=R_1$, $z=0$ で $p=0$ とおけるため，$C=-\rho V^2\ln R_1$が得られる．よって，

$$p=\rho V^2\ln\frac{x}{R_1}-\rho gz$$

(c) $x=R_2$, $z=Z_B$ で $p=0$ とおけるため，

$$0=\rho V^2\ln\frac{R_2}{R_1}-\rho gZ_B\quad\therefore Z_B=\frac{V^2}{g}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

(2)跳水の問題

(a)連続式：$q=h_1V_1=h_2V_2$

　　ここで，q は単位幅流量とする．

　運動量方程式：断面 1 と 2 に挟まれた区間を CV として，運動量方程式を立てる．

$$\rho q(V_2-V_1)=\rho q^2\left(\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1}\right)=\frac{\rho g}{2}h_1^2-\frac{\rho g}{2}h_2^2$$

$$q^2\frac{h_1-h_2}{h_1h_2}-\frac{g}{2}(h_1^2-h_2^2)=0$$

$$(h_1-h_2)\left\{\frac{q^2}{gh_1h_2}-\frac{1}{2}(h_1+h_2)\right\}=0$$

　よって，$h_1=h_2$ と，求める解

$$\frac{h_2}{h_1}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8Fr_1^2}-1\right)$$

が得られる．（$h_2/h_1>0$ の条件を使用.）

(b)断面 1 と 3 に挟まれた区間を CV として，運動量方程式を立てる．段差部分にも静水圧が作用すると仮定する．

$$\rho q(V_3-V_1)=\rho q^2\left(\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)=\frac{\rho g}{2}h_1^2-\frac{\rho g}{2}h_3^2-\frac{\rho g}{2}S(2h_2-S)$$

両辺を$\rho g{h_1}^2$で割り，整理すると

$$\left(\frac{h_3}{h_1}\right)^2=1+2Fr_1^2\left(1-\frac{h_1}{h_3}\right)-2\frac{S}{h_1}\frac{h_2}{h_1}+\left(\frac{S}{h_1}\right)^2$$

$$=1+2Fr_1^2\left(1-\frac{h_1}{h_3}\right)-2\frac{S}{h_1}\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8Fr_1^2}-1\right)+\left(\frac{S}{h_1}\right)^2$$

$$=1+2Fr_1^2\left(1-\frac{h_1}{h_3}\right)+\frac{S}{h_1}\left\{\frac{S}{h_1}-\left(\sqrt{1+8Fr_1^2}-1\right)\right\}$$

(3)段波の問題

(a)段波の移動と共に動く移動座標系で見ると，段波は静止して見える．このとき，断面１，２における流速はそれぞれ，$V+\Delta V-w$, $V-w$ と表される．よって，連続式は，

$$(A+\Delta A)(V+\Delta V-w)=A(V-w)$$

(b)圧力は静水圧に従うとする．断面１の水面から鉛直下向きにとった座標を z，同様に断面 2 で $z'(=z+H)$とおく．両断面の圧力差は，

$$\rho g\left(\int_0^h zbdz-\int_0^{h+H}z'bdz'\right)=\rho g\left(\int_0^h zbdz-\int_0^H z'bdz'-\int_H^{h+H}z'bdz'\right)\quad(1)$$

ここで，

$$\int_0^H z'bdz'=\Delta A\zeta$$

$$\int_H^{h+H}z'bdz'=\int_0^h(z+H)bdz=\int_0^h zbdz+AH$$

よって，(1)式は

$$(1)=-\rho g(AH+\Delta A\zeta)$$

(c)運動量の式は，

$$\rho A(w-V)\{(V-w)-(V+\Delta V-w)\}=-\rho g(AH+\Delta A\zeta)$$

$$\therefore A(w-V)\Delta V=g(AH+\Delta A\zeta)$$

(d)連続式より，

$$\Delta V=\frac{w-V}{A+\Delta A}\Delta A$$

よって，

$$A(w-V)^2\frac{\Delta A}{A+\Delta A}=g(AH+\Delta A\zeta)$$

$$(w-V)^2=g\frac{AH+\Delta A\zeta}{\frac{A\Delta A}{A+\Delta A}}=g\frac{\frac{A}{\Delta A}H+\zeta}{\frac{1}{1+\frac{\Delta A}{A}}}=g\left(\frac{A}{\Delta A}H+\zeta\right)\left(1+\frac{\Delta A}{A}\right)$$

$$\therefore w-V=\pm\sqrt{g\left(\frac{A}{\Delta A}H+\zeta\right)\left(1+\frac{\Delta A}{A}\right)}$$