H26 年国公２次試験専門問題解説（水理）

【No.20】

(1)

(a)

基礎式①：

$$\frac{\alpha}{2g}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{A}\right)^2 - i + \frac{dh}{dx} + \frac{n^2}{R^{\frac{4}{3}}}\left(\frac{Q}{A}\right)^2 = 0$$

が与えられている．ここでは，一般断面の場合について①式を変形するが，横流入・流出が有る場合を考えているので，次の連続式を考慮する必要がある．

連続式(横流入・流出が有る場合)

$$\frac{dQ}{dx} = q$$

①式の左辺第 1 項について，Q と A は x の関数であることと，A は $b(x)$と $h(x)$の関数であることから，

$$\frac{\alpha}{2g}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{A}\right)^2 = \frac{\alpha}{2g}\left(\frac{2Q}{A^2}\frac{dQ}{dx} - \frac{2Q^2}{A^3}\frac{dA}{dx}\right) = \frac{\alpha}{g}\left\{\frac{Qq}{A^2} - \frac{Q^2}{A^3}\left(\frac{\partial A}{\partial b}\frac{db}{dx} + \frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{dx}\right)\right\}$$

となる．よって，①式に代入し，dh/dx について整理すると②式が得られる．ここで，

$$\frac{\partial A}{\partial h} = B$$

とおいている．

※問題中に川幅に相当するものが，B と $b(x)$の 2 つ出ているが，通常の教科書ではこれらは同じものと考え，B=$B(h(x))$と考えている．よって，

$$A = \int_0^h B(h)dh$$

とおける．

(b)題意より，q=0, db/dx=0, A=Bh, R=h．②式にこれらを代入すると，

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - \dfrac{n^2}{h^{\frac{4}{3}}}\left(\dfrac{Q}{Bh}\right)^2}{1 - \alpha\dfrac{Q^2}{gh^3B^2}}$$

等流水深は，dh/dx=0 となる水深であることから，分子＝0.

よって，

$$i - \frac{n^2}{h^{\frac{4}{3}}}\left(\frac{Q}{Bh}\right)^2 = 0$$

$$\therefore\ \ h_0 = \left(\frac{n^2Q^2}{iB^2}\right)^{3/10} = \frac{n^{3/5}Q^{3/5}}{i^{3/10}B^{3/5}}$$

限界水深は，分母=0 となる水深より，

$$1-\alpha\frac{Q^2}{gh^3B^2}=0$$

$$\therefore\ \ h_c=\sqrt[3]{\frac{\alpha}{g}\frac{Q^2}{B^2}}$$

(c)題意より，②式は次式のようになる.

$$\frac{dh}{dx}=\frac{i-\frac{n^2}{R^{\frac{4}{3}}}\left(\frac{Q}{A}\right)^2}{1-\alpha\frac{Q^2B}{gA^3}}$$

分母=0 とおくと，

$$1-\alpha\frac{Q^2B}{gA^3}=0$$

題意より，

$$A=\int_0^h bdh=\int_0^h 2\sqrt{ph}dh=\frac{4}{3}\sqrt{p}h^{3/2}$$

$$B=2\sqrt{ph}$$

よって，

$$h_c=\sqrt[4]{\frac{27\alpha}{32g}\frac{Q^2}{p}}$$

※計算結果については，各自確認してください.

(d)題意より，②式は

$$\frac{dh}{dx}=\frac{i-\frac{n^2}{\left(\frac{hB}{2h+B}\right)^{\frac{4}{3}}}\left(\frac{Q}{hB}\right)^2}{1-\alpha\frac{Q^2}{gh^3B^2}}$$

疑似等流水深は，この式の分子=0 を満たす水深と定義されることから，

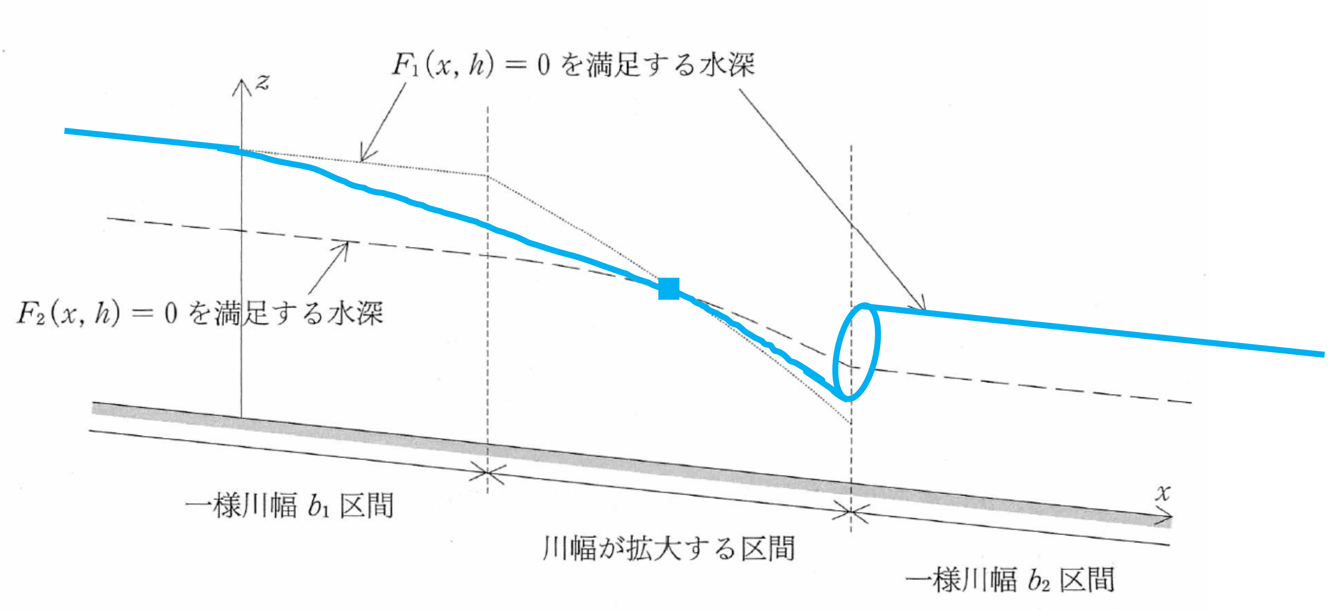
$$i-\frac{n^2}{\left(\frac{hB}{2h+B}\right)^{\frac{4}{3}}}\left(\frac{Q}{hB}\right)^2=0$$

よって，

$$i=\frac{n^2Q^2(2h_0+B)^{4/3}}{(h_0B)^{10/3}}$$

$$\therefore\ h_0{}^{5/2}-2\frac{(nQ)^{\frac{3}{2}}}{i^{\frac{3}{4}}B^{\frac{5}{2}}}\ h_0-\frac{(nQ)^{\frac{3}{2}}}{i^{\frac{3}{4}}B^{\frac{3}{2}}}=0$$

(e)



図Ⅱ

図 II 中の実線は等流水深または疑似等流水深，破線は限界水深を表している．また，川幅が一様な区間において等流水深が限界水深より高いことから，河床勾配は緩勾配であることも分かる．

まず，川幅 b_1 区間の上流と同 b_2 区間の下流は等流水深に一致する．

拡大区間の中央部の疑似等流水深と限界水深が一致する点において限界水深を取ることから，水面形はこの点を通過するように描かれる．よって，幅 b_1 区間からこの点までの水面形は M2 曲線(常流)をとる．一方，この点から幅 b_2 区間へ向かっては射流で流れるが，緩勾配水路の一般的な水面形では表せない．よって，②式において摩擦損失と横流入・流出を無視した式

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i + \dfrac{\alpha Q^2}{gA^3}\dfrac{\partial A}{\partial b}\dfrac{db}{dx}}{1 - \alpha\dfrac{Q^2 B}{gA^3}} = \frac{i + Fr^2 Bh\dfrac{db}{dx}}{1 - Fr^2}$$

から推定する必要がある．$Fr>1$ より，簡略化して考えると，

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i + Fr^2 Bh\dfrac{db}{dx}}{1 - Fr^2} < 0$$

と得られるので，水面形の概形として水深が減少する．また，幅 b_2 区間では等流水深，すなわち常流に遷移する必要があることから，跳水が発生して射流域から上流域への遷移が起こることが分かる．

※本問題は，参考文献［岩佐(1958)：幅の漸変する水路における水流の遷移現象と境界特性との関連に関する理論的研究，土木学会論文集，第 59 号，別冊 3-1.］に詳細な説明があるが，常微分方程式論を駆使する内容であり，非常に難しい．

(2)AB 間と BC 間の流速をそれぞれ，V_1, V_2 とおく．題意より，連続式は

$$\frac{\pi d_1^2}{4}V_1 = \frac{\pi d_2^2}{4}V_2 = \frac{\pi d_3^2}{4}V$$

$$\therefore\ V_1 = \frac{d_3^2}{d_1^2}V = \frac{4}{9}V, \qquad V_2 = \frac{d_3^2}{d_2^2}V = \frac{1}{9}V$$

次に，ベルヌーイの式は，

$$H = f\frac{l_1}{d_1}\frac{V_1^2}{2g} + f\frac{l_2}{d_2}\frac{V_2^2}{2g} + f\frac{l_3}{d_3}\frac{V^2}{2g} + f_e\frac{V_1^2}{2g} + f_{se}\frac{V_1^2}{2g} + f_{sc}\frac{V^2}{2g} + \alpha\frac{V^2}{2g}$$

$$= f\frac{2l_1}{3d_3}\frac{16}{81}\frac{V^2}{2g} + f\frac{l_2}{3d_3}\frac{1}{81}\frac{V^2}{2g} + f\frac{l_3}{d_3}\frac{V^2}{2g} + 0.2\alpha\frac{16}{81}\frac{V^2}{2g} + 0.5\alpha\frac{16}{81}\frac{V^2}{2g} + 0.5\alpha\frac{V^2}{2g} + \alpha\frac{V^2}{2g}$$

$$= \left(\frac{32}{243}l_1 + \frac{1}{243}l_2 + l_3\right)\frac{f}{d_3}\frac{V^2}{2g} + \alpha\frac{132.7}{81}\frac{V^2}{2g}$$

ここで，

$$A = \left(\frac{32}{243}l_1 + \frac{1}{243}l_2 + l_3\right)\frac{f}{d_3} + \alpha\frac{132.7}{81}$$

とおくと，

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{A}}$$

これが，(a)の解となる．

次に，(b)について考える．各管の速度水頭比を求めると，

$$\frac{V_1^2}{2g}:\frac{V_2^2}{2g}:\frac{V^2}{2g} = \frac{16}{81}V^2:\frac{1}{81}V^2:V^2 = \frac{16}{81}:\frac{1}{81}:1 = 16:1:81$$

最後に，(c)について考える．各損失水頭の比を求めると，

$$f_e\frac{V_1^2}{2g}:f_{se}\frac{V_1^2}{2g}:f_{sc}\frac{V^2}{2g}:\alpha\frac{V^2}{2g} = 0.2\alpha\frac{16}{81}\frac{V^2}{2g}:0.5\alpha\frac{16}{81}\frac{V^2}{2g}:0.5\alpha\frac{V^2}{2g}:\alpha\frac{V^2}{2g}$$

$$= 0.2\frac{16}{81}:0.5\frac{16}{81}:0.5:1 = 6.4:16:81:162$$

※比は整数で表すならば上記の解を 5 倍した数値で表しても良いし，分数にして表現しても良い．